Aula 8

Exercício 1)

a) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$

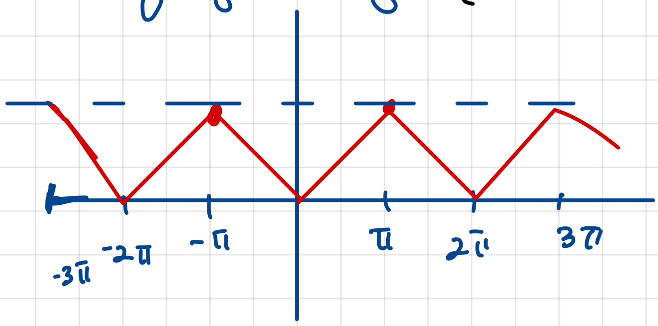
b) $D_f = [-3; 3[$, f só é descontínua em 2 pontos do seu domínio e os limites laterais nesses pontos são finitos, logo f é sec. contínua

c) $D_f = \mathbb{R}$. Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, então f <u>não</u> é sec. contínua.

Exercício 2)

a) $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ 2π-periódica

Gráfico de f (ver aula 7 ex. 2a)



- f é contínua logo é sec. cont.
- f' é sec contínua pois os seus limites laterais ou são 1 ou -1

Logo f é diferenciável.

Como f é contínua, pelo Teo. Dirichlet, então $S(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Por isso, o gráfico de S coincide com o gráfico de f.

Nota: Vimos na última aula que a série de Fourier de $f(x) = |x|$

era $\displaystyle \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{4}{\pi} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

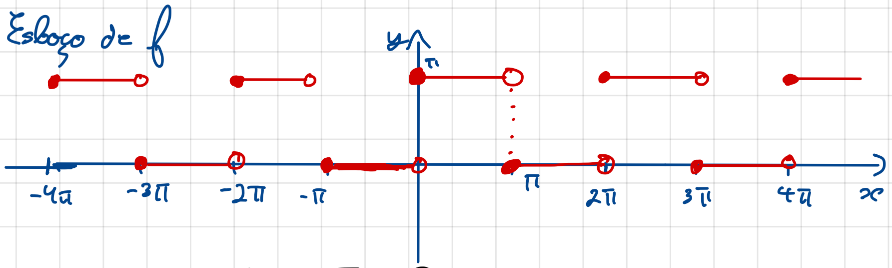
Então podemos escrever que $\displaystyle |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{4}{\pi} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$, $x \in [-\pi, \pi]$

b) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$

f é sec. cont. e, como $f'(x)=0$ no seu domínio, então f é sec. dif.

Pontos de descontinuidade f:
$x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Esboço de f



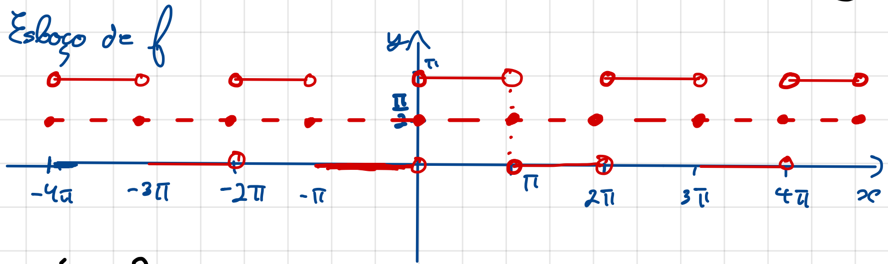
Objetivo: Usar Teo Dirichlet

Nota: Seja $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad f(x^+)=\begin{cases}\pi \text{ se } k \text{ é par}\\ 0 \text{ se } k \text{ é ímpar}\end{cases}$ $\quad f(x^-)=\begin{cases}0 \text{ se } k \text{ é par}\\ \pi \text{ se } k \text{ é ímpar}\end{cases}$

Logo $\dfrac{f(x^+)+f(x)}{2} = \dfrac{0+\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Então, pelo Teo. Dirichlet, $S(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq k\pi\\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$

Esboço de f



Exercício 3:

Usando o ex. 2a) mostrar que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

Pelo ex 2a).

Queremos que seja igual a 1 $\Rightarrow x=0$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} -\frac{4}{\pi}\,\frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)^2},\quad x\in[-\pi,\pi]$$

$\downarrow x=0$

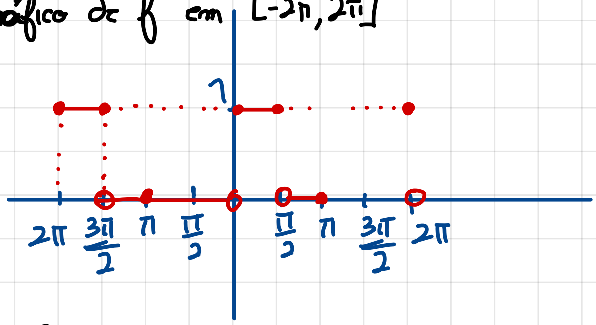
$$|0| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

Ex. 4) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{x}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

a) Gráfico de f em $[-2\pi, 2\pi]$



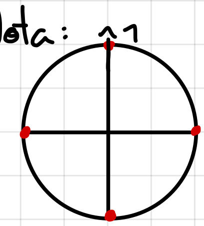
b) Série de Fourier

Nota: f nem é par nem ímpar, logo temos de usar as fórmulas gerais

$a_0 = \frac{1}{2}$

$a_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é par} \\ \frac{1}{\pi m} & \text{se } m = 4k+1 \\ \frac{1}{\pi m} & \text{se } m = 4k+3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$ → TPC

Nota:



$\cos(m\pi) = (-1)^m$

$\sin(m\pi) = 0$

$\text{sen}\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é par} \\ 1 & \text{se } m = 4k+1 \\ -1 & \text{se } m = 4k+3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$

$\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } m = 4k \\ -1 & \text{se } m = 4k+2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$

$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(mx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\text{sen}(mx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,dx \right)$

$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} m\,\text{sen}(mx)\,dx = -\frac{1}{\pi m}\left[\cos(mx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$u = mx$

$u' = (mx)' = m$

$= -\frac{1}{\pi m}\Big(\underbrace{\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{ver nota}} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big) = \begin{cases} \frac{1}{\pi m} & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } m = 4k, \ k \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2}{\pi m} & \text{se } m = 4k+2 \end{cases}$

A série de Fourier é $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left[a_m\cos(mx) + b_m\,\text{sen}(mx)\right]$ onde a_0, a_m e b_m são os coeficientes anteriores.

c) Usar Teorema de Dirichlet

f é sec. dif. → Justificar T.P.C.

- f é contínua em $\pi \Rightarrow S(\pi) = f(\pi) = 0$
- f é descontínua em $\frac{\pi}{2} \Rightarrow S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

d) gráfico de $S(x)$ → T.P.C.

Exercício 5: $f(x) = |x| \times (\pi - |x|)$ em $[-\pi, \pi]$, 2π-periódica

a) Gráfico de f em $[-3\pi, 3\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x \times (\pi - x) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -x \times (\pi - (-x)) & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + \pi x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -x^2 - \pi x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

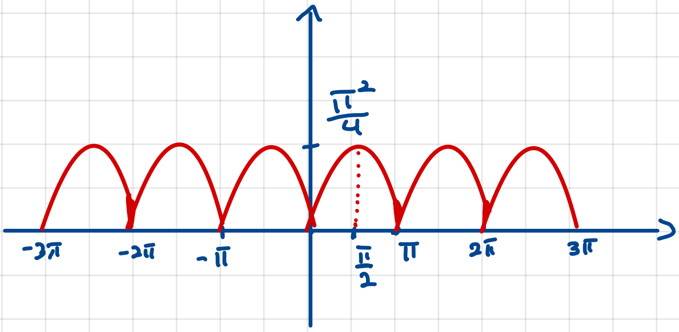
Notas: $f(0) = 0$

$f(\pi) = -\pi^2 + \pi \times \pi = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$f(-\pi) = 0$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$



b) f é uma função par $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow$ Série de cossenos

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } f \\ \text{ser par}}}{a_0 =} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x)\, dx = \frac{2}{\pi} \times \left[\frac{-x^3}{3} + \pi \times \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \underset{\text{TPC}}{=} \cdots \frac{\pi^2}{3}$$

c) Série de Fourier é: $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$ Mostrar que é uniformemente convergente em $[-\pi, \pi]$

↳ critério de Weierstrass

1º Passo: $|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(2nx)}{n^2} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2º Passo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow$ Série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$, logo converge

3º Passo: Portanto, pelo C. Weierstrass a série conv. unif.

d) Mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ (usar a série anterior)

Como f é contínua, pelo Teorema de Dirichlet

Nota: $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$S(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = |x| \times (\pi - |x|), -\pi \leq x \leq \pi$$

usar $x = \frac{\pi}{2}$ para obter $\cos(n\pi)$

$\downarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n}}{n^2} = \frac{\pi}{2} \times \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{6}$$

C. aux $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$